OLASILIKVE İSTATİSTİK

Momentler

Tanım. $m_k = E[X^k]$ beklenen değerine, X rasgele değişkeninin sıfıra göre k. mertebeden momenti denir. Sıfıra göre momentler;

X rasgele değişkeni kesikli ise, $m_k = E[X^k] = \sum \; x^k f(x)$

X rasgele değişkeni sürekli ise, $m_k = E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$

formülleri ile hesaplanır. Sıfıra göre momentlere, adi momentler de denir.

Tanım. $E[(X-c)^k]$ beklenen değerine, c noktasına göre k. mertebeden moment denir. Burada c sabit bir sayıdır.

$c = E[X]$ alınırsa, ortalamaya göre göre k. mertebeden moment elde edilir ve

$\mu_k = E[(X - E[X])^k]$ ile gösterilir. Ortalamaya göre momentlere, merkezi moment denir.

Ortalamaya göre momentler, sıfıra göre momentler cinsinden aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$\mu_1 = 0$

$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = \sigma^2 = Var(X)$

$\mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3$

$\mu_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4$

Tanım. Standart sapmanın, beklenen değere oranına değişim katsayısı(varyasyon katsayısı) denir ve

$$D.K. = \frac{\sigma}{E(X)}100 \quad yada \quad D.K. = \frac{\sigma}{m_1}100$$

ile hesaplanır.

Tanım. $E[\,|X - E(X)|^k\,]$ ifadesine, X rasgele değişkeninin k. mertebeden " *mutlak merkezi momenti* " denir.

Moment Çıkaran Fonksiyon

Tanım. X rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu, $t \in R$ olmak üzere t -nin sürekli bir fonksiyonudur ve

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

biçimindedir.

X rasgele değişkeni kesikli ise, $M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum \; e^{tx} f(x)$

X rasgele değişkeni sürekli ise, $M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$

formülleriyle hesaplanır.

Teorem. X rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu $M_X(t)$ olsun.

$$\left.\frac{d^k M_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = m_k = E[X^k]$$

dir.

Teorem. $a \; ve \; b$ sabitler olmak üzere,

$$M_{X+a}(t) = E\left[e^{t(X+a)}\right] = e^{at} M_X(t)$$

$$M_{bX}(t) = E[e^{tbX}] = M_X(bt)$$

$$M_{\frac{X+a}{b}}(t) = E\left[e^{t\left(\frac{X+a}{b}\right)}\right] = e^{\frac{a}{b}t} M_X\left(\frac{t}{b}\right)$$

dir.

Örnek.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-1}}{x!} & , \quad x=0,1,2,\dots\\ 0 & , \quad diğer\ d.\end{cases}$$

veriliyor. $M_X(t)$, m_1 , m_2 ve $Var(X)$'i bulunuz.

Çözüm.

$$M_X(t)=E[e^{tX}]=\sum_{x=0}^{\infty}e^{tx}f(x)=\sum_{x=0}^{\infty}e^{tx}\frac{e^{-1}}{x!}=e^{-1}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{tx}}{x!}=e^{-1}e^{e^t}\Rightarrow$$

$$M_X(t)=e^{(e^t-1)}$$

bulunur.

$$\left.\frac{d^kM_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0}=m_k=E[X^k]$$

$$m_1=E[X]=\left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0}=1$$

$$m_2=E[X^2]=\left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=2$$

$$Var(X)=\sigma^2=\mu_2=m_2-m_1^2=2-1^2=1$$

Karakteristik Fonksiyon

Rasgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonu bazen bulunamayabilir. Ancak karakteristik fonksiyon her zaman vardır.

Tanım. X rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu, $t \in R$ olmak üzere t -nin sürekli bir fonksiyonudur ve

$$\phi_X(t) = E\left[e^{itX}\right] \;\; , \;\; i = \sqrt{-1}$$

olarak tanımlanır.

X rasgele değişkeni kesikli ise, $\phi_X(t) = E[e^{itX}] = \sum \; e^{itx} f(x)$

X rasgele değişkeni sürekli ise, $\phi_X(t) = E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx$

formülleriyle hesaplanır.

Karakteristik Fonksiyon

$$\phi_X(t) = E\left[e^{itX}\right] = E[\cos(tx)] + iE[sin(tx)] \;\; , \quad e^{itX} = \cos(tx) + isin(tx)$$

biçiminde de ifade edilebilir.

NOT: X rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu biliniyorsa momentler,

$$m_k = E[X^k] = \left.\frac{\frac{d^k}{dt^k}\phi_X(t)}{i^k}\right|_{t=0}$$

biçiminde elde edilebilir.

Örnek.

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & , \;\; x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0 & , \;\; diğer \; d. \end{cases}$$

verilsin. ($n \in N$, $1 - p = q$, $p + q = 1$)

a) X –in karakteristik fonksiyonunu bulunuz.
b) Karakteristik fonksiyon yardımıyla X –in beklenen değerini bulunuz.

Çözüm. a)

$$\phi_X(t) = E\left[e^{itX}\right] = \sum e^{itx} f(x) = \sum_{x=0}^{n} e^{itx}\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^{it})^x (1-p)^{n-x} = [\,pe^{it} + (1-p)]^n$$

b)

$$m_k = E[X^k] = \frac{\frac{d^k}{dt^k}\phi_X(t)}{i^k}\Bigg|_{t=0}$$

$$m_1 = E[X] = \frac{\frac{d}{dt}[\,pe^{it}+(1-p)]^n}{i^1} = \frac{n[\,ipe^{it}][\,pe^{it}+(1-p)]^{n-1}}{i}\Bigg|_{t=0} = \frac{n[\,ip]\overbrace{[\,p+(1-p)]}^{1}{}^{n-1}}{i} = np$$

bulunur.

Teorem. $t = 0$ *için* $\phi_X(t) = 1$ dir.

BAZI ÖNEMLİ EŞİTSİZLİKLER

Rasgele değişkenlerin olasılıkları veya momentleri için bir alt sınır yada bir üst sınır veren eşitsizlikler söz konusudur.

Markov Eşitsizliği

$g(x)$, X rasgele değişkeninin negatif değerler almayan fonksiyonu olmak üzere $k \in R^+$ için

$$P(g(x) > k) \leq \frac{E[g(x)]}{k}$$

biçiminde tanımlanır.

Chebyshev Eşitsizliği

Markov eşitsizliğinin bir sonucudur. Kesikli veya sürekli bir rasgele değişken olasılıkları için alt sınır yada üst sınırı belirler.

X rasgele değişkeninin beklenen değeri $E(X) = \mu$ ve varyansı $Var(X) = \sigma^2$ olmak üzere Chebyshev eşitsizliği,

$$P(|X - \mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad yada \quad P(|X - \mu| \leq k\sigma) > 1 - \frac{1}{k^2}$$

olarak tanımlanır.

Örnek. Bir X rasgele değişkeninin beklenen değerinden(ortalamasından) sapmasının, 3σ dan büyük olması olasılığının en büyük değerini bulunuz.

Çözüm. Olasılık için en büyük değer yani üst sınır isteniyor.

$$P(|X - E[X]| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

3σ dan $k = 3$ olduğu görülüyor. O halde,

$$P(|X - E[X]| > 3\sigma) \leq \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

bulunur.

Örnek. Bir sınıftaki öğrencilerin başarı notlarının ortalaması 60 ve standart sapması 2 olsun. Bu sınıftan rasgele belirlenen bir öğrencinin başarı notunun 50 ile 70 arasında bulunma olasılığı için bir alt sınır belirleyiniz.

Çözüm.

X: $Başarı\ notu$ dersek

$E(X) = \mu = 60$, $\sigma = 2$ verilmiş.

$P(50 \leq X \leq 70) = ?$

Olasılık için alt sınır isteniyor. Chebyshev eşitsizliğinden

$$P(|X-\mu| \leq k\sigma) > 1-\frac{1}{k^2}$$

$$P(-k\sigma+\mu \leq X \leq k\sigma+\mu) > 1-\frac{1}{k^2}$$

$$P(-2k+60 \leq X \leq 2k+60) > 1-\frac{1}{k^2}$$

$P(50 \leq X \leq 70)$

$k=5$ olup

$P(50 \leq X \leq 70) > 1-\frac{1}{5^2} = 0.96$

bulunur.